ТЕОРИЈА БРОЈЕВА И ПОЛИНОМА

Задаци за домаћи (II део) - 2017/2018 година

1. Да ли постоји цео број x такав да су бројеви
$$\frac{3x-2}{13}, \frac{18x-35}{17} \text{ и } \frac{5x-2}{19}$$
истовремено цели?

2. Решити систем конгруенцијских једначина: $\begin{array}{r} 35x \equiv_6 10 \\ 28x \equiv_5 14 \\ 5x \equiv_{14} 30 \end{array}$.

3. Нека је n непаран природан број. Одредити остатак броја $2^{2n}(2^{2n+1}-1)$ при дељењу са 60.

4. Доказати да за сваки прост број $p > 3$ једначина $x^2 - x + 2 \equiv_p 0$ има решење ако и само ако једначина $x^2 - x + 16 \equiv_p 0$ има решење.

5. Да ли постоји цео број x такав да $67 \mid 5x^2 - 4x + 146$?

6. Одредити све природне бројеве n за које важи $33 \mid n^2 + 8$.

7. Доказати да је за сваки прост број $p > 3$, полином $(x+1)^p - x^p - 1$ дељив полиномом $x^2 + x + 1$.

8. Полином $P(x)$ при дељењу са $x^2 - 16$ даје остатак $x + 9$, а при дељењу са $x + 2$ даје остатак -3. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $(x^2 - 16)(x + 2)$.

9. Одредити остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{2018} - x^{2017} + x^{2016}$ са полиномом $Q(x) = x^3 + 1$.

10. Доказати да полином $P(x) = 1 + \dfrac{x}{1} + \dfrac{x^2}{1 \cdot 2} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$ нема вишеструких корена.

11. Одредити a, b и c тако да је полином $P(x) = ax^{2n} - bx^{2n-1} + cx$ дељив са $(x-1)^2(x+1)$. Какав је полином $P(x)$?

12. Нека су α, β, γ и δ нуле полинома $P(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$. Ако су $\dfrac{1}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\beta}$, $\dfrac{1}{\gamma}$ и $\dfrac{1}{\delta}$ нуле полинома $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, одредити a, b, c и d.

13. Наћи све нуле полинома $P(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + a^2$, $a \in \mathbb{R}$ ако је познато да он има реалну нулу вишеструкости 2.

14. Одредити природне бројеве n за које полином $(x^2 + x + 1)^2$ дели полином $x^n + (x+1)^n + 1$.

15. Ако је полином $f(x) = xp(x^3) - q(x^3)$ дељив полиномом $x^2 - x + 1$, онда су полиноми $p(x)$ и $q(x)$ дељиви са $x + 1$. Доказати.

16. Доказати да је полином $P(x) = (n-2m)x^n - nx^{n-m} + nx^m - (n-2m)$ дељив полиномом $Q(x) = (x-1)^3$ за свако $n, m \in \mathbb{N}$.

17. Наћи све нуле полинома $P(x) = x^6 + ax^5 + 36x^4 - 68x^3 + 73x^2 - 42x + 10$ ако је познато да је његова нула $1 - i$ и да има једну троструку нулу. Колико рационалних нула има полином $Q(x)$ где је $Q(x) = 2P(x) - 11$?

18. Одредити $a \in \mathbb{R}$ тако да једна нула полинома $P(x) = x^3 - 26x + a$ буде три пута већа од друге нуле тог полинома.

19. Одредити све вредности реалног параметра a тако да све нуле полинома $P(x) = x^4 + ax^2 + ax - 1$ имају међусобно једнаке модуле.

20. Ако су $x, y, z \in \mathbb{Z}$, решити систем једначина: $\begin{array}{c} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 6 \\ (x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 6. \end{array}$

21. У скупу реалних бројева решити систем једначина:

$$\begin{gathered} x + y + z = 3 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 17 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27. \end{gathered}$$

22. (а) Применом Хорнерове шеме израчунати $P(-2-i)$, где је $P(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$
(б) Користећи Хорнерову шему, разложити полином $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1$ по степенима $x + 1$.